Evolution of Pure State into Mixed State in de Sitter Space-Time

AUTHOR(S):

阪上, 雅昭

§ 3. 粒子生成に伴う揺動的反作用

自己相互作用するスカラー場をド・ジッター時空上で考える。線要素は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu = \alpha^2(\cos\eta)^{-2}(d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2))$$

で与えられる。真空は通常のようにド・ジッター不変なものをとる。そしてノーマルモードの直交性と完全性を用いて § 2 での φ_Δ についての２次の項を計算することができる。結局，この項は，スカラー１粒子状態の自己相互作用を通しての自発的崩壊の確率に比例する事，そして $\varphi_c(x)$ に結合するランダム場 $\xi(x)$ はガウス型白色のスペクトルを持つ事などがわかる。さらに $\xi(x)$ について平均をとって，$\varphi(x)$ の分布関数に対する発展方程式を導く事もできる。発生するゆらぎの大きさは，スカラー場の質量mに大きく依存するが，通常計算される量子ゆらぎの大きさよりかなり小さい。特に $m \gg$（ハッブル半径$)^{-1}$ ならば，統計的ゆらぎの相関関数は $\exp[-m\cdot$（ハッブル半径）$]$ のように小さくなる。従ってゆらぎが６ケタ程大きすぎるという通常の困難は必ずしもインフレーションモデルの困難ではない。

最後に，用いた真空についての考察・計算ではド・ジッター不変な真空を選んだが，これを選ばなければならない決定的な理由はない。そもそも状態は，我々が選ぶものではなく，宇宙が自発的に進化していくものである。特にエントロピー生成やゆらぎの発生のある時間発展は，ハイゼンベルグ描像の枠には完全にはおさまらない。宇宙膨張して生成した粒子が最終的に熱平衡におちつき熱い宇宙を作るわけだが，演算子の時間発展だけ見ていたのでは粒子数分布やコヒーレンスの変化を記述できない。この観点からは，我々の結果は，単に，初期に用意されたド・ジッター不変な真空はスカラー場の自己相互作用に関して不安定であり，秩序変数の非一様性を誘起して，他の状態に崩壊していくのだと言う事ができる。

References

1) M. Morikawa, submitted to Prog. Theor. Phys.
2) 小玉英雄，本号の研究会報告。またR. Brandenberger Rev. Mod. Phys. **57** (1985), 1.
3) 2) の文献を参照して下さい。また阪上雅昭，佐々木節，本号の研究会報告。
4) O. Nachtmann, Sitzungsber. Osterr. Akad. Wiss. Math. Naturwiss. kl. **176** (1968) 363.
N. P. Myhrvold, Phys. Rev. **D15** (1983) 2439.

Evolution of Pure State into Mixed State in de Sitter Space−Time

広大・理論研　阪　上　雅　昭

インフレーション宇宙モデルは初期宇宙（$t \sim 10^{-34}$ sec）での相転移により起こる宇宙の指数函数的膨張とエントロピー生成を利用して Big Bang 宇宙論の基本的問題であった horizon 問題・flatness 問題を解決することができる[1]。さらにこのモデルでは現在の宇宙あるいは銀河に対応するスケールが宇

宙初期には因果的につながっている領域の大きさ H^{-1}（H: ハッブルパラメタ）より小さいため銀河のもとになる密度ゆらぎの起源を microscopic physics から説明することが可能である。既に相転移の秩序パラメタになるスカラー場 ϕ のゆらぎから密度ゆらぎが生成するというシナリオで計算されており，ある程度の成功を収めている[2)]。

その基本的な考え方は次の様になっている。宇宙が指数函数的に膨張しているとハッブルパラメタHで特徴づけられる量子ゆらぎが存在する。例えば massless conformally coupled scalar field の場合

$$< \phi^2(x) > = \frac{H^2}{12\pi^2}$$

となる。インフレーション宇宙では急激な膨張による red shift のため，ゆらぎの波数が $k=0$ に縮重し量子ゆらぎから古典ゆらぎが実現すると期待される。秩序パラメタ $\Phi(\mathbf{x})$（スカラー場 ϕ の古典部分）は，それぞれの位置 $\mathbf{x}$ で上の古典分布のうちの異なる値をとるので $\Phi(\mathbf{x})$ にHで特徴づけられる空間的非一様性が生じこれが Energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$ の古典的ゆらぎを与える。

上の古典的密度ゆらぎが生成される過程で最も重要なのはスカラー場 ϕ の量子ゆらぎが古典化する過程である。しかしこのゆらぎの古典化は仮定として導入されたもので，実際可能かどうか調べられていない。ここではゆらぎの古典化が実現されることを，簡単なモデルを用いて具体的に示す。

まず量子ゆらぎの古典化という過程を正確に表現しよう。そのため量子ゆらぎを期待値 $< \phi^2(\mathbf{x}) >$ ではなく wave functional $\Psi[\phi(\mathbf{x})]$ で記述する。ここでは場の演算子 $\phi(\mathbf{x})$ を対角化する表現をとっている。量子論的確率分布 $|\Psi|^2$ から秩序パラメタに対する古典的確率分布が失なわれることは wave functional Ψ のコヒーレンスが失なわれることを意味する。つまり pure state Ψ が mixed state に移行すること，この場合は $\Psi[\phi]$ からつくった density matrix $\rho[\phi, \phi'] = \Psi[\phi]\Psi^*[\phi']$ の非対角成分が減衰し，$\phi(\mathbf{x})$ の古典的分布を与える $\phi(\mathbf{x})$ 表示での対角成分だけが残るということがインフレーション宇宙における量子ゆらぎの古典化を正確に表現している。

ここでは秩序パラメタに対応する自由度の他にそれと相互作用する自由度（environment）を導入し，その自由度について Trace（coarse graining）をとった reduced density matrix ρ_{red} を考え，この非対角成分が減衰することを示す。environment の自由度を積分した ρ_{red} を考えることが重要であるが，これは i）相転移の dynamics は秩序パラメタによって記述される ii）インフレーション以前の environment に対応する粒子は指数函数的膨張により吹き飛ばされどの様な状態にあるか判らない等の理由により妥当である。

まず互いに一次結合している調和振動子のモデル

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{k^2}{2}x^2 - c\,xR + \frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{w^2}{2}R^2 \qquad (1)$$

で reduced density matrix ρ_{red} のふるまいを調べよう。ここでx振動子が秩序パラメタ，R振動子が environment に対応する。時刻 t での density matrix は座標表示で

$$\rho(x, R : y, Q : t) \equiv < x, R | \rho(t) | y, Q >$$

$$= \int dx'\, dy'\, dR'\, dQ' < x,\ R\,|\,e^{-iHt}\,|\,x',\ R' >< x',\ R'\,|\,\rho(0)\,|\,y',\ Q' >$$

$$< y',\ Q'\,|\,e^{iHt}\,|\,y,\ Q > \tag{2}$$

と表わされる。さらに environment にあたる R 振動子の自由度について Trace をとると reduced density matrix

$$\tilde{\rho}(x,\ y,\ t) \equiv \int dR\, \rho(x,\ R:\ y,\ R:\ t) \tag{3}$$

が得られる。(2) 式で同様に R 振動子の自由度を積分すると $\tilde{\rho}$ の時間発展がわかる。

$$\tilde{\rho}(x,\ y,\ T) = \int dx'\, dy'\, J(x,\ y,\ t\,;\ x',\ y',\ 0)\, \rho_A(x',\ y',\ 0) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &J(x,\ y,\ t\ :\ x',\ y',\ 0) \\ &= \int [dX]\,[dY] \exp\ i\{ S_A[X] - S_A[Y] \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^\tau ds\,(X(\tau) - Y(\tau))\,\beta(\tau - s)(X(s) + Y(s))\} \\ &\quad \times \exp[-\int_0^t d\tau \int_0^\tau ds\,(X(\tau)\ Y(\tau))\,\alpha(\tau - s)(X(s) - Y(s))] \end{aligned} \tag{5}$$

$$\alpha(\tau - s) = \frac{c^2}{2\omega} \cos\omega(\tau - s) \tag{6}$$

$$\beta(\tau - s) = -\frac{c^2}{2\omega} \sin\omega(\tau - s) \tag{7}$$

ただし t = 0 では全系の density matrix が x 振動子の density matrix $\rho_A(0)$ と R 振動子のそれ $\rho_B(0)$ の積になっているとし

$$\rho(0) = \rho_A(0)\ \rho_B(0) \tag{8}$$

さらに R 振動子は t = 0 で基底状態であったと仮定した。また (5) 式の S_A は x 振動子に対する action である。

J-function (5) の被積分函数の第 1 項で，S_A の部分は x 振動子の free motion による時間変化，$\beta(\tau - s)$ を含む部分は environment を積分したため生じた量子補正を表わしている。これらの項は density matrix の phase の変化を決めるのに対し，第 2 項は $\tilde{\rho}$ の amplitude を変える。ここで第 2 項が x 振動子に対応する 2 つの変数の差 $X(\tau) - Y(\tau)$ の functional になっていることに注目する必要がある。この事実は第 2 項が reduced density matrix $\tilde{\rho}$ の非対角成分を減衰させる可能性を示唆している。

$\tilde{\rho}(t)$ は J-function (5) を計算し初期分布 $\tilde{\rho}(0)$ での積分をすると求まるので，ここでは J の時間

的ふるまいを調べる。(5)式の path-integral を運動方程式の解とそのまわりのゆらぎに分けて評価する。今の場合 action は X, Y について2次であるのでゆらぎからの寄与は $\hbar$ の高次でかつ J の引数 $x=X(t)$, $x'=X(0)$ に依存しない。従って運動方程式の解を用いて(5)式の exponent を計算すれば J のふるまいがわかる。ここではさらに $\tilde{\rho}$ の非対角成分の減衰を与える可能性のある(5)式の被積分函数の第2項に注目しよう。

古典解を

$$\Delta X(\tau)=X(\tau)-Y(\tau)=Ae^{ik\tau}+A^{*}e^{-ik\tau} \tag{9}$$

と表わそう。Aは定数で J(x, y, t : x′, y′, 0) の引数により

$$A=\frac{1}{2i\sin kt}\{(x-y)-(x'-y')e^{-ik\tau}\} \tag{10}$$

と与えられる。この $\Delta X(\tau)$ を(5)式第2項に代入すると

$$\begin{aligned} e^{-D(A,t)} &\equiv \exp\left[-\frac{c^2}{2\omega}\int_0^t d\tau\int_0^\tau ds\,\Delta X(\tau)\cos\omega(\tau-s)\,\Delta X(s)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{c^2}{\omega}\left|Ae^{\frac{i}{2}kt}\frac{\sin\frac{k+\omega}{2}t}{k+\omega}+A^{*}e^{-\frac{i}{2}kt}\frac{\sin\frac{k-\omega}{2}t}{k-\omega}\right|^2\right] \end{aligned} \tag{11}$$

となる。J-function の amplitude は e^{-D} によって表わされるので, Dが正定値であることから必ず $\tilde{\rho}$ の非対角成分を減衰させる様に働くことがわかる。ただし environment が1自由度の場合は D(A, T) はあくまで振動的で $\tilde{\rho}$ はある周期で最初の状態にもどる。

次に environment が無限自由度で振動数 ω について連続的に分布している場合を考えよう。分布函数を $\rho(\omega)$ とすると減衰項は

$$D(A,t)=c^2\int_0^\infty d\omega\frac{\rho(\omega)}{\omega}\left|Ae^{\frac{i}{2}kt}\frac{\sin\frac{k+\omega}{2}t}{k+\omega}+A^{*}e^{-\frac{i}{2}kt}\frac{\sin\frac{k-\omega}{2}t}{k-\omega}\right|^2 \tag{12}$$

となる。簡単な場合として $\rho(\omega)=\omega$ とすると積分が実行でき

$$D(A,t)=c^2\left\{AA^{*}\frac{t}{2}+(A^2e^{ikt}+A^{*2}e^{-ikt})\frac{\sin kt}{4k}\right\} \tag{13}$$

となり $\tilde{\rho}$ の非対角成分に対して時間 t に比例した減衰が現われる。

再帰的でない減衰が生じた理由を考えてみよう。environment が1自由度の場合(11), $\tilde{\rho}$ は $\frac{2}{k}$, $\frac{2}{k-\omega}$, $\frac{2}{k+\omega}$ の最小公倍数で定まる周期で $t=0$ の状態に戻ってくる。x振動子と R 振動子の振動数 k と ω が近づくにつれこの周期は長くなり共鳴条件 $k=\omega$ を満たすと無限大になる。従って environment が無限自由度の時でも $\rho(\omega)$ が $\omega=k$ のあたりで連続的に分布していることが重要である。共鳴条件をみたす ω 付近の environment を積分することにより失なわれた $\tilde{\rho}$ の情報は無限の時間が経過しなければ戻ってこず, $\tilde{\rho}$ の非対角成分が指数函数的に減衰する。

次にインフレーション宇宙でのゆらぎのふるまいをみるため de Sitter space でのスカラー場のモデルを調べよう。具体的には de Sitter space

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, d^2\mathbf{x} \quad , \quad a(t) = e^{Ht}$$

での2つの conformally coupled massless scalar field ϕ, η からなる action

$$S[\phi, \eta] = \int d^4x \sqrt{-g}\, \{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{R}{12}\phi^2 - \alpha\phi\eta^2$$
$$-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \eta \partial_\nu \eta - \frac{R}{12}\eta^2 + J\phi \ \} \tag{14}$$

を考える。スカラー場 ϕ は相転移の秩序パラメタ, η は environment に対応する。2つのスカラー場とも質量, 自己相互作用を考えなかったが, η については計算を簡単にするためである。ϕ については相転移の初期 $\phi \sim 0$ での $\tilde{\rho}(\phi, \phi')$ のふるまいに興味があるので無視できる[3]。

以下, 調和振動子の場合と同様に計算を進める。J-function のうち(11)式に対応する density matrix の非対角成分の amplitude 変化させる項は

$$e^{-D(\Phi_\Delta,\ \Phi_\Delta{}^0)}$$
$$= \exp[-\frac{\alpha^2}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{t} d\tau\, ds\, e^{3H\tau}\, \phi_\Delta^{-\mathbf{k}}(\tau)\ \mathrm{Im}\,\Sigma^{|\mathbf{k}|}{}_F(\tau, s)\, e^{3Hs}\, \phi_\Delta^{\mathbf{k}}(s)\,] \tag{15}$$

で与えられる。ここでは結合定数 α が小さいとして η 場を積分する時に α の2次までとり高次の項は無視した。また $\mathrm{Im}\,\Sigma^{\mathbf{k}}$ は η 場の積分により現われる self-energy の imaginary part で, η 場に対して $t \to -\infty$ で conformal vacuum を設定すると

$$\mathrm{Im}\,\Sigma^{|\mathbf{k}|}(\tau, \tau') = e^{-2H(\tau+\tau')} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega(\eta-\eta')}\, \mathrm{Im}\,\Sigma(\omega, k)$$
$$\mathrm{Im}\,\Sigma(\omega, k) = \frac{\pi}{16}\,\theta(\omega^2 - k^2) \tag{16}$$
$$\eta = H^{-1}\, e^{-H\tau} \ , \quad k = |\mathbf{k}|$$

となる。(15)式に $\phi_\Delta^{\mathbf{k}}$ の古典解

$$\phi_\Delta^{\mathbf{k}}(\tau) = e^{-H\tau}\,(A_k\, e^{ik\eta} + A^*_k\, e^{-ik\eta}) \tag{17}$$

を代入すると

$$D(\Phi_\Delta, \Phi_\Delta{}^0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \pi(k, \eta) \ , \tag{18}$$

$$\pi(k, \eta) = \frac{\alpha^2}{H^2} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \mathrm{Im}\,\Sigma(\omega, k)\, |A_k\, E(|\omega+k|\eta) + A^*_k\, E(|\omega-k|\eta)|^2 \tag{19}$$

$$E(x) = -\int_x^\infty d\xi \frac{e^{i\xi}}{\xi} \tag{20}$$

が得られる。これを調和振動子の場合の $\tilde{\rho}$ の非対角成分に対する減衰項 (12) と比べてみよう。(18) 式の運動量 $\mathbf{k}$ での積分は秩序パラメタ $\phi^k(t)$ の互いに独立な自由度の重ね合わせになっているので D(A, T) (18) には (k, η) (19) が対応する。 ともに正定値な函数のスペクトル変数での積分になっているが, D(A, T) の被積分函数が常に振動的であるのに対し $\pi(k, \eta)$ の場合 E(x) の漸近的なふるまい

$$E(x) \to \gamma + \ln x + \frac{\pi}{2} i \quad (x \to 0) \tag{21}$$

からわかるように t が大きくなるとスペクトル変数 ω の積分をする前から $\tilde{\rho}$ の非対角成分を減衰させる効果が見えている。これは de Sitter space のように background の時空が急激に膨張している場合, 有限自由度の environment を積分するだけで $\tilde{\rho}$ の非対角成分の減衰が起こることを意味している。

(19) 式の ω 積分は $k\eta \ll 1$ の時, 実行でき

$$\pi(k, \eta) \sim \frac{\alpha^2}{32\pi^2} \frac{1}{H^2 \eta} \{\pi - k\eta(\ln 2k\eta)^2\}(A + A^*)^2 \tag{22}$$

$$k\eta = k_{phys} / H$$

となる。ここで $k_{phys} = ke^{-Ht}$ は宇宙の指数函数的膨張により red shift している物理的運動量である。従って (22) 式は k_{phys} が horizon の大きさ H^{-1} を超えたあたりでスカラー場 ϕ の reduced density matrix $\tilde{\rho}(\phi, \phi')$ の非対角成分が急激に減衰することを示している。

従ってインフレーション宇宙ではゆらぎの波長が horizon の大きさを超えたところで量子ゆらぎが古典化する。つまり量子ゆらぎから銀河のもととなる古典的密度ゆらぎを生成するというインフレーション宇宙での銀河形成のシナリオがうまくいくことを示している。

References

1) A. H. Guth, Phys. Rev. **D23** (1981) 347;
K. Sato, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **195** (1981) 467;
A. D. Linde, Phys. Lett. **108B** (1982) 389;
A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1220;
For a review, A. D. Linde, Rep. Prog. Phys. **47** (1984) 925.

2) S. W. Hawking, Phys. Lett. **115B** (1982) 295;
A. A. Starobinsky, Phys. Lett. **117B** (1982) 175;
A. H. Guth and S.-Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 110;
J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, Phys. Rev. **D28** (1983) 679.

3) A. H. Guth and S.-Y. Pi, Phys. Rev. **D32** (1985) 1899.